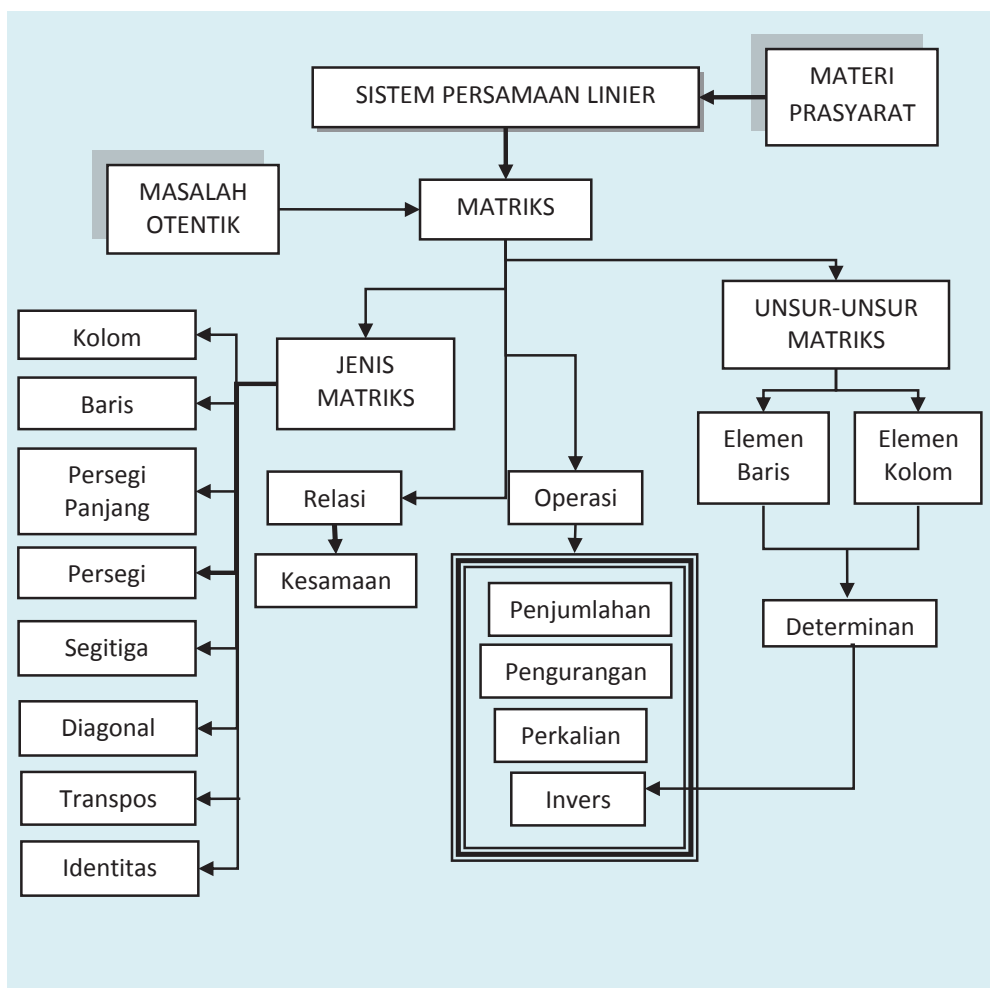
Matriks

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata; 5. memahami operasi sederhana matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • melatih berpikir kritis dan kreatif; • mengamati keteraturan data; • berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah; • berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka; • mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Elemen Matriks*
- *Ordo Matriks*
- *Matriks Persegi*
- *Matriks Identitas*
- *Transpos Matriks*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Matriks

Informasi yang terdapat dalam suatu koran atau majalah tidak senantiasa berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf, tetapi ada kalanya disampaikan dalam bentuk sebuah tabel. Tampilan informasi dalam suatu tabel lebih tersusun baik dibandingkan dalam bentuk paragraf. Hal seperti ini sering kita temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen akhir Liga Super Indonesia, data perolehan nilai dan absensi siswa, maupun brosur harga jual sepeda motor.

Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, mari kita cermati uraian berikut ini. Diketahui data hasil penjualan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya, dari sebuah agen tiket, selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1: Keterangan situasi tiket penerbangan ke Medan dan Surabaya

Tujuan	Hari ke			
	I	II	III	IV
Medan	3	4	2	5
Surabaya	7	1	3	2

Pada saat kamu membaca tabel di atas maka hal pertama yang kamu perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk tiap-tiap kota setiap harinya. Data tersebut, dapat kamu sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat kamu lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Berikut ini akan kita cermati lebih dalam lagi mengenai matriks dari masalah-masalah kehidupan kita sehari-hari.

Masalah-4.1

Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Masihkah kamu ingat posisi duduk sewaktu kamu mengikuti Ujian Nasional SMP? Maksimal siswa dalam satu ruang ujian hanya 20 peserta, biasanya disusun dalam lima baris, empat kolom, seperti yang disajikan pada Gambar 4.1.

Untuk memudahkan pengaturan peserta ujian dalam suatu ruangan, pihak sekolah menempatkan siswa dalam ruang ujian dengan pola nomor ujian melalui Nomor Induk Siswa (NIS), yang ditempelkan di tempat duduk siswa. Misalnya, nomor ujian peserta di ruang A adalah NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, NIS siswa-22, NIS siswa-23,... , NIS siswa-44, NIS siswa-51, NIS siswa-52, NIS siswa-53, NIS siswa-54. Jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-12, itu berarti posisi peserta saat ujian berada pada baris ke-1 lajur ke-2, dan jika nomor ujian peserta adalah NIS siswa-34, artinya posisi peserta tersebut saat ujian berada pada baris ke-3 kolom ke-4. Demikian pula, jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-51, artinya posisi siswa saat ujian berada pada baris ke-5 kolom ke-1. Tentunya, untuk setiap peserta ujian yang memiliki nomor ujian NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, …, NIS siswa-53, dan NIS siswa-54 dengan mudah memahami posisi mereka dalam ruang ujian tersebut. Tentukan susunan peserta ujian ditinjau dari pola Nomor Induk Siswa (NIS)!

Alternatif Penyelesaian

Susunan peserta ujian jika dilihat dari NIS, dalam bentuk baris dan kolom, dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Meja Pengawas Ujian

$$\begin{bmatrix} \text{NIS } 11 & \text{NIS } 12 & \text{NIS } 13 & \text{NIS } 14 \\ \text{NIS } 21 & \text{NIS } 22 & \text{NIS } 23 & \text{NIS } 24 \\ \text{NIS } 31 & \text{NIS } 32 & \text{NIS } 33 & \text{NIS } 34 \\ \text{NIS } 41 & \text{NIS } 42 & \text{NIS } 43 & \text{NIS } 44 \\ \text{NIS } 51 & \text{NIS } 52 & \text{NIS } 53 & \text{NIS } 54 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.2. Denah posisi tempat duduk peserta ujian berdasarkan NIS

Masalah-4.2

Masalah lain yang terkait dengan susunan dapat kita amati susunan barang-barang pada suatu supermarket. Tentunya, setiap manager supermarket memiliki aturan untuk menempatkan setiap koleksi barang yang tersedia. Coba kita perhatikan gambar berikut ini!

Gambar 4.3 Ruang koleksi barang-barang pada suatu supermarket

Tentukanlah posisi koleksi beras dan tepung pada susunan di atas!

Alternatif Penyelesaian

Gambar di atas mendeskripsikan ruangan koleksi barang-barang suatu supermarket, yang terdiri atas tiga baris, 4 kolom. Koleksi beras dan tepung terdapat pada baris ke-3, kolom ke-2. Koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-4 adalah koleksi bumbu dapur.

- Coba kamu sebutkan posisi baris dan kolom setiap koleksi barang yang lain!
- Seandainya susunan koleksi barang-barang tersebut juga tersusun bertingkat, bagaimana matriks yang terbentuk?

Masalah-4.3

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Bogor	126 km	Bandung–Semarang	367 km
Bandung–Cirebon	130 km	Bandung–Yogyakarta	428 km
Bandung–Surabaya	675 km	Bogor–Cirebon	256 km

Bogor–Surabaya	801 km	Cirebon–Yogyakarta	317 km
Bogor–Semarang	493 km	Surabaya–Semarang	308 km
Bogor–Yogyakarta	554 km	Surabaya–Yogyakarta	327 km
Cirebon–Surabaya	545 km	Semarang–Yogyakarta	115 km
Cirebon–Semarang	237 km		

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak-jarak antar kota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

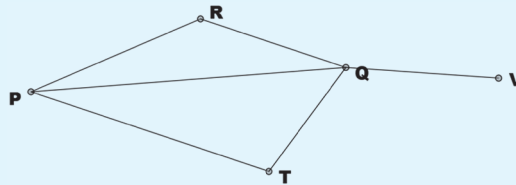
	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	125	256	493	554	801	0

Dari tampilan di atas, dia cukup jelas mengetahui jarak antar kota tujuan wisata. Jika kita ingin menampilkan susunan jarak-jarak tersebut, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 130 & 367 & 428 & 675 & 126 \\ 130 & 0 & 237 & 317 & 545 & 256 \\ 367 & 237 & 0 & 115 & 308 & 493 \\ 428 & 317 & 115 & 0 & 327 & 554 \\ 675 & 545 & 308 & 437 & 0 & 801 \\ 126 & 256 & 493 & 554 & 801 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antar kota di pulau Jawa ini, terdiri dari 6 baris dan 6 kolom.

Masalah-4.4

Pak Margono yang tinggal di kota *P* memiliki usaha jasa pengiriman barang. Suatu ketika, perusahaan pak Margono menerima order mengirim barang ke kota *V*. Jika setiap dua kota yang terhubungkan diberi bobot 1, sedangkan dua kota yang tidak terhubungkan diberi bobot 0. Nyatakanlah persoalan pengiriman barang tersebut dalam bentuk matriks.

Gambar 4.4 Diagram rute pengiriman barang

Alternatif Penyelesaian

Kata kunci pada persoalan ini adalah keterhubungan antar dua kota, secara matematis, fungsi keterhubungan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } \quad i = j \\ 1, & \text{untuk } \quad \text{i} \neq j \end{cases}$$

Dari gambar di atas, kota *P* terhubungan dengan semua kota, kecuali ke kota *V*. Keterhubungan antar dua kota ini, dapat kita nyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

- Coba temukan lintasan mana yang terpendek untuk membawa barang dari kota *P* ke kota *V*!

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & R & Q & T & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ R \\ Q \\ T \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \text{Susunan angka-angka berbentuk persegi.}$$

Matriks representasi keterhubungan antar dua kota, disebut matriks *X* yang anggota-anggotanya terdiri dari angka 1 dan 0.

Dari empat masalah di atas, masalah yang dikaji adalah aturan susunan posisi setiap objek dan benda dinyatakan dalam aturan baris dan kolom. Banyak baris dan kolom dikondisikan pada kajian objek yang sedang diamati. Objek-objek yang disusun pada setiap baris dan kolom harus memiliki karakter yang sama.

Secara umum, matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa " ( )" atau kurung siku " [ ] ".

Biasanya pelabelan suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A, B, C, D, ..., dan seterusnya. Secara umum, diberikan matriks A,

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \rightarrow \text{baris ke-3} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-}m \end{matrix}$$

kolom ke-n

kolom ke-3

kolom ke-2

kolom ke-1

a_{ij} bilangan real, menyatakan elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j, $i = 1, 2, 3, .., m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$A_{m \times n}$: m menyatakan banyak baris matriks A.
n menyatakan banyak kolom matriks A.

Notasi $m \times n$, menyatakan ordo (ukuran) matriks A, yang menyatakan banyak baris dan kolom matriks A. Ingat, m menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom matriks A. Jadi, jika diperhatikan ordo suatu matriks, dapat diketahui banyaknya elemen-elemen pada matriks.

Masalah-4.5

Tentukanlah matriks 4×4, $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $a_{ij} = i^{(j-1)}$!

Alternatif Penyelesaian

$$Matriks\ A_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

nilai a_{ij}, ditentukan dengan $a_{ij} = i^{j-1}$.

- $a_{11} = 1^{1-1} = 1$
- $a_{12} = 1^{2-1} = 1$
- $a_{13} = 1^{3-1} = 1$
- $a_{14} = 1^{4-1} = 1$
- $a_{21} = 2^{1-1} = 1$
- $a_{22} = 2^{2-1} = 2$
- $a_{23} = 2^{3-1} = 4$
- $a_{24} = 2^{4-1} = 8$
- $a_{31} = 3^{1-1} = 1$
- $a_{32} = 3^{2-1} = 3$
- $a_{33} = 3^{3-1} = 9$
- $a_{34} = 3^{4-1} = 27$
- $a_{41} = 4^{1-1} = 1$
- $a_{42} = 4^{2-1} = 4$
- $a_{43} = 4^{3-1} = 16$
- $a_{44} = 4^{3-1} = 64$

Jadi, matriks A berordo 4×4 yang dimaksud adalah:

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.1

Teguh, siswa kelas X SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix} \quad T_{\times}$$

Matriks $T_{2\times 3}$ adalah matriks persegipanjang dengan berordo 2×3.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times 2}$ adalah matriks berordo 3×2.

Dapatkah kamu menciptakan susunan matriks, minimal dua cara dengan cara yang berbeda? Kamu perlu memikirkan cara lain yang lebih kreatif!

2. Jenis-Jenis Matriks

Contoh 4.1 di atas, menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini, $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

$T_{1\times 2} =$ [46 43], matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1\times 4} =$ [22 19 14 12], matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada kolom matriks tersebut. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1, yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$$T_{5\times1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix},$$ matriks kolom berordo 5×1, yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.

c. Matriks Persegipanjang

Matriks persegipanjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

$$T_{2\times3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix},$$ matriks persegipanjang berordo 2×3, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh.

$$T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix},$$ matriks persegipanjang berordo 3×2, yang merepresentasikan umur semua anggota keluarga Teguh.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$$T_{2\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix},$$ matriks persegi berordo 2×2, yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.

Jika kita meninjau matriks persegi berordo 4×4 di bawah ini.

$$H_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

→ Diagonal Samping matriks H

→ Diagonal Utama matriks H

Diagonal utama suatu matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F dan G berordo 4×4. Jika terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F_{4\times4} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G_{4\times4} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

maka matriks persegi yang berpola seperti matriks F dan G disebut matriks segitiga.

Jadi, matriks segitiga merupakan suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dengan elemen-elemen matriks di bawah atau di atas diagonal utama semuanya nol.

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi, seperti matriks berikut ini.

- $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka matriks persegi dengan pola “semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama tidak semuanya bernilai nol”, disebut matriks diagonal.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

- $I_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika suatu matriks persegi unsur diagonal utamanya adalah 1 dan unsur yang lainnya semua nol disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

h. Matriks Nol

Jika elemen suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $Q_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $Q_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $Q_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka disebut matriks nol.

3. Transpos Matriks

Pak Susilo, pensiunan PLN, memiliki banyak koleksi buku, majalah, dan novel yang pernah dia beli maupun terima selama dia masih aktif sebagai pegawai PLN. Karena begitu banyak koleksi buku tersebut, ditambah lagi ruang koleksinya tidak memadai, Pak Susilo berniat akan menghibahkan semua buku-buku tersebut ke kampung halamannya, yaitu di Tegal. Sebelum ke mobil dibawa Parman, cucunya, membantu menyusun buku-buku tersebut dalam tumpukan-tumpukan seperti pada gambar di bawah ini.

Ruang Baca

Pengangkutan						
	Buku Komik	Majalah Sport	Majalah Teknik	Buku Motivasi	Buku Matematika	Buku Fisika
	Buku Kimia	Novel Petualang	Majalah Furniture	Buku Rohani	Buku Budaya	Bahasa Inggris
	Koleksi Kamus	Majalah Intisari	Buku Peta	Buku Sejarah	Buku Autbio-graphy	Majalah Fashion

Gambar 4.5. Diagram susunan koleksi buku-buku

Jika direpresentasikan semua koleksi tersebut dalam matriks, dengan sudut pandang dari ruang baca, akan diperoleh matriks persegi panjang berordo 3 × 6. Kita sebut matriks *B*,

$$B_{3\times 6} = \begin{bmatrix} BKo & MS & MT & BMo & BMa & BF \\ BKi & NP & MF & BR & BB & BI \\ KK & MI & BP & BS & BA & MF \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, karena halaman rumah Pak Susilo yang tidak cukup untuk ruang gerak truk sehingga truk harus diparkir di sebelah Barat ruang baca Pak Susilo. Pihak pengangkutan menyusun semua koleksi tersebut menurut barisan buku yang terdekat ke truk. Matriks *B*, berubah menjadi:

$$B_{6\times 3} = \begin{bmatrix} BKo & BKi & KK \\ MS & NP & MI \\ MT & MF & BP \\ BMo & BR & BS \\ BMa & BB & BA \\ BF & BI & MF \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kedua matriks $B_{3\times 6}$ dan $B_{6\times 3}$, dalam kajian yang sama, ternyata memiliki relasi. Relasi yang dimaksud dalam hal ini adalah "perubahan posisi elemen matriks", atau disebut transpos matriks, yang diberi simbol B^t sebagai

transpos matriks B. Namun beberapa buku menotasikan transpos matriks $\overline{B}$ dengan atau B'.

Perubahan yang dimaksud dalam hal ini adalah, setiap elemen baris ke-1 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-1 pada matriks B^t, setiap elemen baris ke-2 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-2 pada matriks B^t, demikian seterusnya, hingga semua elemen baris pada matriks matriks B menjadi elemen kolom pada matriks B^t. Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpos matriks suatu matriks.

Contoh 4.2

a. Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks S, adalah

$$S^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 5 & 15 & 9 \\ 7 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

b. Jika $A = [-3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 19]$, maka $A^t = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

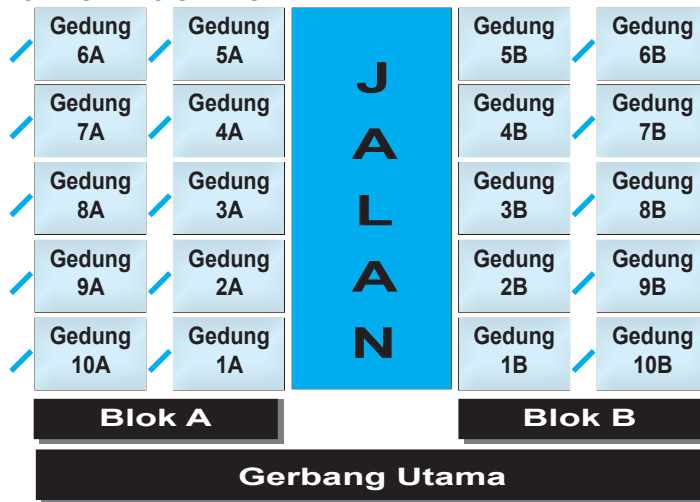
c. Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$, maka $C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transpos matriks berordo $n \times m$.

Coba kamu pikirkan…

- Mungkinkah suatu matriks sama dengan transposnya? Berikan alasanmu!
- Periksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, untuk setiap matriks A dan B berordo $m \times n$?

4. Kemandirian Dua Matriks

Pada suatu kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangun yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.

Gambar 4.6 Denah komplek ruko

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok A sama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok A sama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok A dan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Dari ilustrasi di atas, kita akan mengkaji dalam konteks matriks. Dua matriks dikatakan sama jika memenuhi sifat berikut ini.

Definisi 4.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh 4.3

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi matriks $P^t = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian

Karena P merupakan matriks berordo 3×2, maka P^t merupakan matriks berordo 2×3. Sedangkan matriks Q merupakan matriks berordo 2×3. Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks $P^t = Q$.

Dengan $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $P^t = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a, b, c, dan d sebagai berikut:

- $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.
- $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.
- Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.

Uji Kompetensi 4.1

1. Diketahui matriks $M = [2\ \ 6\ \ 12\ \ 7\ \ 11]$ dan $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks M dan N, tentukanlah :
   a. Elemen baris ke-1 kolom ke-3 pada matriks M!
   b. Elemen kolom ke-1 baris ke-5 pada matriks N!
   c. Hasil perkalian elemen baris ke-2 pada matriks N dengan elemen kolom ke-4 pada matriks M!
   d. Selisih elemen baris ke-6 pada matriks N terhadap elemen kolom ke-2 pada matriks M!
   e. Elemen baris ke-7 pada matriks N. Silahkan jelaskan!
2. Menurut kamu, apakah ada batasan banyak baris dan kolom untuk membentuk suatu matriks? Jelaskan!
3. Coba berikan contoh yang lain (selain yang disajikan di atas) mengenai matriks yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari!
4. Menurut kamu, teknologi apakah yang menggunakan konsep matriks yang sedang kita pelajari ini? Tolong deskripsikan!

5. Buatlah matriks yang terdiri dari 5 baris dan 3 kolom, dengan semua elemennya adalah 15 bilangan prima yang pertama. Tentukan transpos matriksnya!
6. Jika elemen suatu matriks merupakan anggota bilangan kuadrat, buatlah matriks yang terdiri dari 7 baris dan 2 kolom! Tentukan transpos matriksnya!
7. Tentukanlah matriks berordo 5 × 5, dengan aturan:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \; i - j > 1 \\ -1 & \text{jika } \; i - j \leq 1 \end{cases}$$

8. Menurut ilmu kedokteran, dikatakan bahwa terdapat relasi antara berat badan dengan tinggi badan seseorang. Bisakah kamu merepresentasikan persoalan tersebut ke dalam matriks? (Silahkan gunakan data berat badan dan tinggi badan teman sekelasmu)!
9. Jelaskan nilai kebenaran untuk setiap pernyataan berikut ini!
   a. Dua matriks yang berordo sama merupakan syarat perlu bagi dua matriks yang sama.
   b. Dua matriks yang sama merupakan syarat cukup bagi dua matriks yang sama.

   Petunjuk: Jika kamu belum paham arti syarat cukup dan syarat perlu, silahkan tanyakan pada gurumu!
10. Masalah Penugasan Pengasuh Bayi. Sebuah biro jasa penyedia pengasuh bayi mempunyai empat klien dan lima pengasuh. Biro tersebut mengevaluasi tingkat kecocokan antara klien dan pengasuh bayi dalam sebuah tabel dengan skala nol sampai sepuluh; nilai nol artinya klien tidak cocok dengan pengasuh bayi dan nilai sepuluh untuk klien yang sangat cocok dengan pengasuh. Tabel peringkat tersebut sebagai berikut!

		Nama Pengasuh Bayi				
		Tarsi	Inem	Wati	Nurlela	Marni
KLIEN	Ibu Ratna	7	4	7	3	10
	Ibu Santi	5	9	3	8	7
	Ibu Bonita	3	5	6	2	9
	Ibu Soimah	6	5	0	4	8

Bagaimanakah biro jasa tersebut menugaskan pengasuh-pengasuhnya agar dapat memaksimumkan jumlah angka kecocokan antara klien dengan pengasuh?

11. Untuk matriks-matriks berikut, tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t,$$

$$D = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

12. Diketahui matriks-matriks

$$T = \begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix}$$ dan

$$R = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Tentukan transpos dari matriks *T*!

b) Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, dan *f*!

13. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

dan matriks $X = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks *A* sama dengan matriks *X*?. Jelaskan!

14. Pada tahun ajaran baru, Anas mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buah buku Matematika dan 4 buah buku Biologi. Dia harus membayar sebesar Rp 410.000. Pada saat yang bersamaan, Samad mewakili teman-teman yang lainnya membeli 10 buah buku Matematika dan 6 buah buku Biologi. Samad harus membayar Rp 740.000 untuk semuanya.

Nyatakanlah persoalan tersebut dalam bentuk matriks dan selesaikanlah!

Projek

Temukan contoh penerapan matriks dalam ilmu komputer, bidang ilmu fisika, kimia, dan teknologi informasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku matematika, fisika, biologi, kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku matematika, tersedia buku aljabar, geometri, statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom sebuah matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk mendapatkannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah

a. Operasi Hitung pada Matriks

1) *Penjumlahan Dua Matriks*

Untuk memudahkan kita memahami penjumlahan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah-4.6

Sebuah perusahaan garmen memiliki dua pabrik yang berlokasi di Jakarta dan Surabaya. Perusahaan itu memproduksi dua jenis produk, yaitu baju dan jas. Biaya untuk bahan ditangani oleh sebuah departemen dan upah buruh ditangani oleh pabrik departemen lainnya. Biaya untuk setiap jenis produk diberikan pada matriks berikut.

Pabrik di Surabaya (dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	200	600
Buruh	20	80

Pabrik di Jakarta (dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	125	450
Buruh	25	90

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Surabaya, sebagai matriks S dan biaya matriks di Jakarta sebagai matriks *J*, maka biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk kedua pabrik tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

- Total biaya bahan untuk baju = 200 + 125 = 325
- Total biaya bahan untuk jas = 600 + 450 = 1050
- Total biaya buruh untuk baju = 20 + 25 = 45
- Total biaya buruh untuk jas = 80 + 90 = 170

Jika keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks, adalah sebagai berikut:

Total Biaya Pabrik (dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	325	1050
Buruh	45	170

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan diakibatkan kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks

biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 4.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B, ditulis $C = A + B$, matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Catatan:
Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks adalah sama dengan memiliki ordo yang sama dengan matriks yang dijumlahkan.

Contoh 4.4

a) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, maka mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$.

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3×3, karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3×3 juga.

- $$T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

- $O+T=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+6&0+3&0+1\\0+5&0+5&0+0\\0+1&0+3&0+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}=T$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks tidak nol yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas, I.

2) *Pengurangan Dua Matriks*

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks $-B$, ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Matriks $-B$ dalam merupakan matriks yang elemennya berlawanan dengan setiap elemen yang bersesuaian matriks B.

Contoh 4.5

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a) Jika $K=\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}$ dan $L=\begin{bmatrix}9\\7\\5\end{bmatrix}$, maka

$$K-L=K+(-L)=\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9\\-7\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\\-4\\0\end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks-matriks X, Y, dan Z sebagai berikut:

$$X=\begin{bmatrix}1&3\\5&7\\9&11\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\\10&12\end{bmatrix},\ \text{dan}\ Z=\begin{bmatrix}2&3&5\\7&11&13\\17&19&23\end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini:

i) $Y-X$ ii) $Y-Z$ iii) $X-Z$.

Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2. Sedangkan matriks Z berordo 3×2. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.

Diskusi

Operasi penjumlahan dikatakan bersifat komutatif jika $a + b = b + a$, untuk setiap a, b bilangan real.

- Dalam kajian matriks, apakah $A + B = B + A$?
- Bagaimana dengan operasi pengurangan dua matriks? Apakah $A - B = B - A$? Silahkan diskusikan!

3) *Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks*

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan semua elemen matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai:

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 4.4

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A, dinotasikan: $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j).$$

Contoh 4.6

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2H = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka $\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 12 & \frac{1}{3}\times 30 & \frac{1}{3}\times 15 \\ \frac{1}{3}\times 0 & \frac{1}{3}\times 24 & \frac{1}{3}\times 18 \\ \frac{1}{3}\times 3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika $M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times 12 & \frac{1}{4}\times 24 & \frac{1}{4}\times 36 \\ \frac{1}{4}\times 48 & \frac{1}{4}\times 60 & \frac{1}{4}\times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times 12 & \frac{3}{4}\times 24 & \frac{3}{4}\times 36 \\ \frac{3}{4}\times 48 & \frac{3}{4}\times 60 & \frac{3}{4}\times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M.$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok masalah berikut.
M suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij}, p dan q adalah bilangan real. Jika $C = (p + q) \times M$, maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = (p + q)a_{ij}$ untuk setiap i dan j. Sehingga $(p + q)\ M = p \times M + q$ x M.

d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $c = -1$, maka

$$c \times (P - Q) = -1 \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \right) = -1 \times \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok bahwa jika matrik P dan Q merupakan dua matriks berordo sama, dan c adalah bilangan real, maka $c \times (P - Q) = c \times P - c \times Q$. Tentunya hasil $c \times (P - Q)$ sama dengan $c \times P - c \times Q$. Untuk matriks P dan Q berordo $m \times n$, dan c suatu skalar, c bilangan real. Silahkan diskusikan bahwa $c \times (P + Q) = c \times P + c \times Q$.

e) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ dan $p = 2$ dan $q = \dfrac{1}{2}$.

Kita dapat memahami bahwa:

$$q \times L = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan hasil p dengan q, maka kita akan peroleh:

$$p \times (q \times L) = 2 \times \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L, merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p \times (q \times L)$.
Sekarang, untuk matriks M berordo $m \times n$, p dan q adalah skalar anggota Himpunan Bilangan Real, tunjukkan bahwa: $p \times (q \times L) = (p \times q).L$.

4) *Perkalian Dua Matriks*

Masalah-4.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu handphone, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga Handphone (jutaan)	2
Harga Komputer (jutaan)	5
Harga Sepeda Motor (jutaan)	15

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan, matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan jumlah unit

setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3\times1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

- Cabang 1
  Total biaya = (7 unit handphone × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor ×15 juta).
  = Rp 99.000.000,-
- Cabang 2
  Total biaya = (5 unit handphone × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp 70.000.000,-
- Cabang 3
  Total biaya = (4 unit handphone × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit komputer × 5 juta)
  = Rp 43.000.000,-

Jadi, total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut:

$$R_{3\times1} = \begin{bmatrix} 99.000.000 \\ 70.000.000 \\ 43.000.000 \end{bmatrix}.$$

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks D. Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks D, maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{n\times m}$ dan matriks $B_{p\times n}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom B. Hasil perkalian matriks A berordo $n \times m$ terhadap matriks B berordo $p \times n$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ terhadap matriks $B_{n\times p}$, dinotasikan $C = A \times B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 4.7

a) Diketahui matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

Sekarang, silahkan tentukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dengan meng-

gunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0\\3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0\\5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 4\\10 & 17 & 12\\16 & 27 & 20\end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a), silahkan periksa apakah matriks $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ dapat dikalikan dengan matriks $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

Contoh 4.8

Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$. Tentukanlah A^{2013}!

Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=-1\times\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=-1\times I=-I$$

JJika $A_2 = -I$, maka $A^4 = I$. Artinya, untuk setiap pangkat matriks A kelipatan 2, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

2013 = 4.(503) + 1.

Akibatnya,

$A^{2013} = A^{(4.(503)+1)} = (A^4)^{503}.A^1$.

Matriks $A^4 = I$, dan $I^n = I$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, akibatnya berlaku, $(A^4)^{503} = I$.

Oleh karena itu,

$$A^{2013}=I\times A=A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

Pertanyaan Kritis

- Syarat apakah yang harus dipenuhi untuk memenuhi cara seperti di atas?
- Apakah $A^4 = 1$ berlaku untuk sembarang matriks persegi berordo 2×2?

Uji Kompetensi 4.2

1. Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo 4×5 dan misalkan, C, D, dan E berturut-turut adalah matriks-matriks berordo 5×2, 4×2, dan 5×4. Tentukanlah yang mana antara pernyataan matriks di bawah ini yang terdefinisi. Jika ada tentukanlah ukuran matriks tersebut!
   (a) BA (d) $AB + B$
   (b) $AC + D$ (e) $E(A + B)$
   (c) $AE + B$ (f) $E(AC)$
2. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!
   a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
   b) $6.\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
   c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
3. Apa yang dapat kamu jelaskan dengan operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks $A.X = B$, dengan matriks A dan B matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks X? Tolong paparkan di depan kelas!
4. Berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menerapkan konsep perkalian matriks! (Selain konteks persoalan yang sudah disajikan pada buku ini).
5. Diketahui matriks-matriks

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t$

   dan $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$.

   Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!
6. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$,

dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan A+X=B. Tentukan matriks X!

7. Berikan beberapa matriks A dan B yang memenuhi kesamaan $(A + B)^t = A^t + B^t$!
8. Tunjukkan bahwa $A^r.A^s = A^{(r+s)}$, untuk semua matriks A matriks persegi!
9. Tentukanlah nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini! Untuk setiap matriks A dan B adalah matriks persegi.
   a) Jika elemen pada kolom ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen kolom ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
   b) Jika elemen pada baris ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen baris ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
10. Tentukanlah nilai-nilai p, q, r, dan s pada persamaan matriks berikut!

$$5\begin{bmatrix} r & a \\ p & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}.$$

11. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika $F(X, Y, Z)$ didefinisikan sebagai $F(X, Y, Z) = 4X - 2Y + Z$.
Tentukanlah
$F(A, B, C)$!
$F(2A, 3B, 2C)$!

12. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, dan lima matriks yang dapat dipilih untuk dikalikan dengan matriks G, yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = G^t, K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } L = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang manakah dapat dikalikan terhadap matriks G? Kemudian tentukan hasilnya!

13. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
    i. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
    ii. $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$
14. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $C^3 - 4C^2 + C - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3.
15. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!
    a) $G = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $G^2 = I$
    b) $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $F^2 = xF + y.I$

    I adalah matriks identitas berordo 2×2.

Projek

Himpunlah minimal lima masalah di bidang ekonomi, transportasi, dan teknik yang melibatkan konsep dan operasi dua buah matriks atau lebih. Ujilah apakah berlaku berbagai sifat operasi matriks di dalam pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan paparkan di depan kelas.

6. Determinan dan Invers Matriks

Masalah-4.8

Pekan Raya Jakarta, biasanya diselenggarakan sekitar Juli setiap tahunnya. Acara ini menampilkan berbagai hal menarik tentang ibukota negara Indonesia, seperti pameran teknologi terbaru, kebudayaan Betawi, hasil industri kreatif, dan banyak hal lain yang perlu disaksikan.

Tahun 2012, keluarga Pak Tatang akan menghadari kegiatan tersebut dengan membeli 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak seharga Rp 210.000,00. Dengan niat yang sama, keluarga Pak Asep membeli 2 tiket dewasa dan 3 tiket anak-anak seharga Rp 190.000,00,-

Berapakah total uang tiket yang akan dibayar oleh Pak Asep, jika dia harus menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak?

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Untuk menyederhanakan masalah di atas, kita misalkan

x : harga tiket dewasa

y : harga tiket anak-anak.

Oleh karena itu, persoalan di atas dinyatakan dalam persamaan linear dua peubah seperti berikut.

Banyak tiket yang dibeli Pak Tatang : $3x + 2y = 210.000$

Banyak tiket yang dibeli Pak Asep : $2x + 3y = 190.000$

Matriks yang merepresentasikan kedua persamaan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \quad \text{.................................... (1)}$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linear,

Menurut kamu, apakah semua sistem persamaan linear dua variabel memiliki penyelesaian? Silahkan diskusikan dengan temanmu.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \times c_1 - b_1 \times c_2}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \times c_2 - a_2 \times c_1}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1},\ a_1b_2 \neq a_2b_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

- Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain *SPLDV*. Tentunya, kamu mampu menunjukkannya.

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1.b_2 - a_2.b_1)$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ atau det.$(A) = |A|$, dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$.

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 210.000 & 2 \\ 190.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{630.000 - 380.000}{9 - 4} = \frac{250.000}{5} = 50.000.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 210.000 \\ 3 & 190.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{570.000 - 420.000}{9 - 4} = \frac{150.000}{5} = 30.000.$$

Jadi, harga tiket Pekan Raya Jakarta untuk orang dewasa adalah Rp 50.000,00 dan untuk anak-anak adalah Rp 30.0000,00.
Karena Pak Asep ingin menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak, maka dia harus menambah uang tiket sebesar Rp 210.000,00. Total biaya tiket yang harus dibayar Pak Asep adalah Rp 400.0000,00.

Cara II
Dengan menggunakan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

Kita misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$, akibatnya persamaan tersebut menjadi :
$A.X = B$. …………………………………………………….. (4)

Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada persamaan (4)?

Definisi 4.5

Misalkan A matriks berordo $n \times n$. Matriks A^{-1} adalah invers matriks A jika dan hanya jika $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

Misalkan A matriks persegi, berordo 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Maka invers matriks A, dinotasikan A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{(a \times d - b \times c)} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \times d \neq b \times c.$$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ disebut adjoin matriks A, dinotasikan *Adjoin* A.

Salah satu sifat invers matrik adalah $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1}.A.X = A^{-1}B$. (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1}.A).X = A^{-1}B$

$I.X = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ (karena $I.X = X$)………………………………………… (5)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat det.$A \neq 0$, namun ada beberapa

teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.

Kembali ke persamaan matriks,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B.$$

Karena A adalah matriks tak singular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah kita lanjutkan menentukan matriks X.

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 250.000 \\ 150.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 50.000$ dan $y = 30.000$.

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara I. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

Masalah-4.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara *A*, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat, yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara *A*, seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat dari yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x: banyaknya pesawat Airbus 100
y: banyaknya pesawat Airbus 200
z: banyaknya pesawat Airbus 300
Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\left.\begin{array}{l} 50x+75y+40z=305 \\ 30x+45y+25z=185 \\ 32x+50y+30z=206 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}.$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular.
Ada beberapa cara untuk menentukan $det.A$, antara lain Metode Sarrus. Yaitu sebagai berikut:

Misalnya matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka deteminan A adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}.$$

Untuk matriks pada masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 50 & 75 & 40 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 25 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 30 & 32 & 50 \end{array} \right.$$

$= (50.45.30) + (75.25.32) + (40.30.50) - (32.45.40) - (50.25.50) - (30.30.75)$

$= -100.$

Analog dengan persamaan (3), kita dapat menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2.$$

Oleh karena itu, banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan: 3 unit
banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan: 1 unit
banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan: 2 unit.

- Analog dengan cara II untuk penyelesaian masalah Pembelian Tiket PRJ, cobalah kamu menyelesaikan masalah pengadaan pesawat ini dengan cara yang sama. Mintalah bimbingan dari gurumu.

Contoh 4.9

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan A, B, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks $A.B$, yaitu:

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Jika matriks $A.B$ tersebut kita peroleh $\det(A.B) = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28$.

Sekarang akan kita bandingkan dengan nilai $|A|.|B|$.

Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = 14$, dan jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\det(B) = -2$.

Nilai $\det(A).\det(B) = 14.(-2) = -28$.
Sedangkan bahwa $\det(A.B) = \det(A).\det(B) = -28$.

Latihan 4.1

1) Selidiki apakah $|A.B.C| = |A|.|B|.|C|$ untuk setiap matriks-matriks A, B, dan C berordo $n \times n$.
2) Jika matriks A adalah matriks persegi berordo 2×2, dan k adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks $k.A$.

Contoh 4.10

Sebuah matriks P berordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a, b, c, d \in R$.

Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$. Tentukanlah determinan matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Penyelesaian

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinan matriks P adalah α, maka berlaku $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ $ad - bc = \alpha$.

Elemen matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P, yaitu:
q_{21} = hasil kali skalar × terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{21}.
q_{22} = hasil kali skalar × terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{22}.
Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \begin{matrix} \to \text{baris 1} \\ \to \text{baris 2} \end{matrix}$$

Elemen baris 1 matriks Q = elemen baris 1 matriks P. Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks Q menjadi elemen baris 2 matriks P.
q_{21} dapat dioperasikan menjadi:
$(q_{21})^* = s.q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa + sa & xd - sb + sb \end{vmatrix}$$

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \begin{matrix} \to \text{baris } 1^* \\ \to \text{baris } 2^* \end{matrix}.$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru Matematika), maka $|Q| = x.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha, \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \right)$.

Jadi $|Q| = x\alpha$.

Latihan 4.2

Misalkan P matriks berordo 3 × 3, dengan $|P| = \alpha$ dan matriks Q berordo 3 × 3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas. Tentukan determinan matriks Q!

Uji Kompetensi 4.3

1. Selidiki bahwa $\det(A^n) = (\det A)^n$, untuk setiap:

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 3$

2. Diketahui $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8$,

   tentukanlah:

   a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$!

   b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$!

3. Tentukanlah z yang memenuhi persamaan berikut!

   $$\begin{vmatrix} z & 5 & 7 \\ 0 & z+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Selidiki bahwa $\det(C+D) = \det(C) + \det(D)$! Untuk setiap matrik C dan D merupakan matriks persegi.

5. Jika matriks M adalah matriks berordo 2×2, $|M| \neq 0$. Tentukan hubungan $|M|$ dengan $\det M^{-1}$. Coba kamu generalisasikan untuk matriks M berordo $n \times n$!

6. Tentukanlah nilai z, yang memenuhi persamaan berikut ini!

   $$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}.$$

7. Jika elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!

8. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!

   a) $\det(2A) = 2.\det(A)$

   b) $|A^2| = |A|^2$

   c) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$

   Untuk matriks A merupakan matriks persegi.

9. Untuk matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$, dengan $PQ \neq QP$. Apakah $\det(PQ) = \det(QP)$? Jelaskan!

10. Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan elemen kolom ke-1 semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!

11, Masalah Nutrisi

    Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira.

Setelah berkonsultasi dengan seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makanan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks G, dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks J.

$$G = \begin{array}{c} \scriptstyle \textit{Sumber I} \quad \textit{Sumber II} \\ \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Kalsium} \\ \textit{Protein} \\ \textit{Karbohidrat} \end{array}$$

$$J = \begin{array}{c} \scriptstyle \textit{Biskuit A} \quad \textit{Biskuit B} \quad \textit{Biskuit C} \\ \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Sumber}\ \text{I} \\ \textit{Sumber}\ \text{II} \end{array}$$

a. Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B!

b. Hitunglah $G.J$ dan jelaskan arti dari setiap elemen matriks tersebut!

12. Masalah alokasi sumber daya.
Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp 400.000,00 per malam, tranprotasi ke tiap tempat wisata Rp 80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 90.000,00.

a) Nyatakan matriks harga sewa hotel, tranportasi dan makan.

b) Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.

c) Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.

d) Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

13. Masalah Persediaan Toko Cat.
Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persedian tiga jenis cat eksterior, yaitu *regular*, *deluxe*, dan *commercial*. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$R = \begin{array}{c} \scriptstyle \textit{Biru} \quad \textit{Hitam} \quad \textit{Kuning} \quad \textit{Coklat} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c} \scriptstyle \textit{Biru} \quad \textit{Hitam} \quad \textit{Kuning} \quad \textit{Coklat} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

a. Tentukan inventaris toko pada akhir minggu.

b. Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks *T*. Tentukan inventaris toko yang baru.

14. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa $(B^{-1})^{-1} = B$ dan $[B^t]^{-1} = [B^{-1}]^t$!

15. Tentukanlah determinan dari matriks

$$M = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$

16. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel.

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 0$$

Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Projek

Himpun minimal tiga permasalahan dalam bidang ekonomi, transportasi, dan matematika terkait penerapan konsep determinan dan *invers* matriks. Selidiki sifat *invers* matriks yang diterapkan pada pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks A ditransposkan menghasilkan matriks A^t dengan elemen baris matriks A berubah menjadi elemen kolom matriks A^t. Dengan demikian matriks A^t ditrasposkan kembali, hasinya menjadi matriks A atau $(A^t)^t = A$.
3. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
4. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, misal jika A dan B adalah matriks, maka
   a. $A + B = B + A$
   b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
5. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen dari matriks semula.
6. Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom dari matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris dari matriks pengalinya.
7. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas perkalian, hasilnya adalah matriks A.
8. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks dengan skalar memenuhi sifat komutatif dan assosiatif. Misal jika k adalah skalar, A, dan B adalah matriks maka berlaku.
   a. $k\,A = A\,k$
   b. $k(A \pm B) = kA \pm kB$
9. Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B. Misal jika $A_{p\times q}$ dan $B_{q\times r}$ adalah dua buah matriks, maka berlaku $A_{p\times q} \times B_{q\times r} = C_{p\times r}$.
10. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

Selanjutnya kita akan bahas tentang relasi dan fungsi. Untuk mempelajari relasi dan fungsi, anda harus mempelajari ulang tentang konsep dan sifat-sifat himpunan, sebab semua relasi dan fungsi didefinisikan pada domainnya yang berupa himpunan. Demikian juga daerah kawan dan daerah hasil suatu relasi dan fungsi adalah suatu himpunan.